

解答篇



單元 1 乘法公式

簡答區

基礎練習題

- 0.9801 2. 12600
- (1) 130 ; (2) $2\sqrt{29}$; (3) $24\sqrt{29}$
- $\frac{1}{1980}$ 5. 512

進階練習題

- $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
- $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
- (1) 23 ; (2) 110
- (1) $(a + b + c)(a + b - c)$;
(2) $(4x^2 + 25)(2x + 5)(2x - 5)$;
(3) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- (1) $99 - 70\sqrt{2}$; (2) $-19x^3 - 35y^3$

詳答區

基礎練習題

- $0.99^2 = (1 - 0.01)^2$
 $= 1^2 - 2 \times 1 \times 0.01 + 0.01^2$
 $= 1 - 0.02 + 0.0001$
 $= 0.9801$ 。
- 大正方形面積 = 113^2 ,
 小正方形面積 = 13^2 ,
 兩正方形面積差 = $113^2 - 13^2$
 $= (113 + 13)(113 - 13)$
 $= 126 \times 100 = 12600$ 。
- (1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
 $= 12^2 - 2 \times 7$
 $= 144 - 14$
 $= 130$ 。

$$(2) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$= 130 - 2 \times 7$$

$$= 116。$$

$$\Rightarrow a - b = \pm \sqrt{116} = \pm 2\sqrt{29} \text{ (取正)。$$

$$(3) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$= 12 \times 2\sqrt{29}$$

$$= 24\sqrt{29}。$$

$$4. \frac{1987^2 - 2 \times 1987 \times 7 + 7^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1987^2 - 7^2}$$

$$= \frac{(1987 - 7)^2}{1980^2} \times \frac{1994}{(1987 + 7)(1987 - 7)}$$

$$= \frac{1980^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1994 \times 1980}$$

$$= 1 \times \frac{1}{1980}$$

$$= \frac{1}{1980}。$$

$$5. (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \dots$$

$$\times (2^{256} + 1)$$

$$= (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)$$

$$\times \dots \times (2^{256} + 1)$$

$$= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \dots$$

$$\times (2^{256} + 1)$$

$$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \dots \times (2^{256} + 1)$$

$$= (2^8 - 1)(2^8 + 1) \times \dots \times (2^{256} + 1)$$

$$\vdots$$

$$= 2^{512} - 1。$$

$$\Rightarrow n = 512。$$

進階練習題

- $(2x - 3)^3$
 $= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times (2x) \times 3^2 - 3^3$
 $= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27。$
- $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$
 $= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$
 $= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)。$

$$3. (1) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25,$$

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2 \times x \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23.$$

$$(2) x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 5 \times (23 - 1)$$

$$= 5 \times 22 = 110.$$

$$4. (1) (a+b)^2 - c^2 = [(a+b)+c][(a+b)-c]$$

$$= (a+b+c)(a+b-c).$$

$$(2) 16x^4 - 625 = (4x^2)^2 - 25^2$$

$$= (4x^2 + 25)(4x^2 - 25)$$

$$= (4x^2 + 25)[(2x)^2 - 5^2]$$

$$= (4x^2 + 25)(2x+5)(2x-5).$$

$$(3) x^6 - 1$$

$$= (x^3)^2 - 1^2$$

$$= (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

$$= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

$$5. (1) (3 - 2\sqrt{2})^3$$

$$= 3^3 - 3 \times 3^2 \times 2\sqrt{2} + 3 \times 3 \times (2\sqrt{2})^2$$

$$- (2\sqrt{2})^3$$

$$= 27 - 54\sqrt{2} + 72 - 16\sqrt{2}$$

$$= 99 - 70\sqrt{2}.$$

$$(2) (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$$

$$- (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$$

$$= [(2x)^3 - (3y)^3] - [(3x)^3 + (2y)^3]$$

$$= (8x^3 - 27y^3) - (27x^3 + 8y^3)$$

$$= -19x^3 - 35y^3.$$

單元 2 因式分解

簡答區

基礎練習題

- (1) $(x+3)(3x+8)$;
(2) $-(2x+3)(x-5)$;
(3) $-(x-3)(x+4)$
- (1) $(x+8)(x-8)$;
(2) $(x-4)^2$;
(3) $4(x+3)^2$
- (1) $(5x+3)(x+1)$;
(2) $(7x-2)(3x+4)$;
(3) $2(x-3)(2x+5)$
- (1) $(x-6)(x-a)$;
(2) $(x+y-1)(x-y-1)$;
(3) $2y(7x+5y)$
- $-x^5(3x-4)(2x+1)$

進階練習題

- (1) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$; (2) $-4x^2(x^2+2)$
- (1) $(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)$;
(2) $(x^2+5x+13)(x^2+5x-3)$
- (1) $(x^2+x+4)(x^2-x+4)$;
(2) $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$
- 18 5. $\frac{5}{3}$

詳答區

基礎練習題

- (1) $(x+3)(3x+7)+(x+3)$
 $= (x+3)[(3x+7)+1]$
 $= (x+3)(3x+8)$
- (2) $(2x+1)(2x+3)-(3x-4)(2x+3)$
 $= (2x+3)[(2x+1)-(3x-4)]$
 $= (2x+3)(2x+1-3x+4)$
 $= (2x+3)(-x+5)$
 $= (2x+3)[-(x-5)]$
 $= -(2x+3)(x-5).$

$$\begin{aligned}
 (3) & (x-3)^2 + (2x+1)(3-x) \\
 &= (x-3)^2 + (2x+1)[-(x-3)] \\
 &= (x-3)^2 - (2x+1)(x-3) \\
 &= (x-3)[(x-3) - (2x+1)] \\
 &= (x-3)(x-3-2x-1) \\
 &= (x-3)(-x-4) \\
 &= (x-3)[-(x+4)] \\
 &= -(x-3)(x+4) \circ
 \end{aligned}$$

2. (1) $x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x+8)(x-8) \circ$
 (2) $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x-4)^2 \circ$

$$\begin{aligned}
 (3) & (2x+3)^2 + 6(2x+3) + 9 \\
 &= (2x+3)^2 + 2 \times (2x+3) \times 3 + 3^2 \\
 &= [(2x+3) + 3]^2 \\
 &= (2x+6)^2 \\
 &= [2(x+3)]^2 \\
 &= 4(x+3)^2 \circ
 \end{aligned}$$

3. (1) $5x^2 + 8x + 3$

$$\begin{array}{r}
 5x \quad \times \quad +3 \\
 x \quad \quad \quad +1 \\
 \hline
 5x \quad + \quad 3x = 8x \\
 = (5x+3)(x+1) \circ
 \end{array}$$

(2) $21x^2 + 22x - 8$

$$\begin{array}{r}
 7x \quad \times \quad -2 \\
 3x \quad \quad \quad +4 \\
 \hline
 28x \quad - \quad 6x = 22x \\
 = (7x-2)(3x+4) \circ
 \end{array}$$

(3) $\triangleq A = (2x+1)$,
 $(2x+1)^2 - 3(2x+1) - 28$
 $= A^2 - 3A - 28$

$$\begin{array}{r}
 A \quad \times \quad -7 \\
 A \quad \quad \quad +4 \\
 \hline
 4A \quad - \quad 7A = -3A \\
 = (A-7)(A+4) \\
 = [(2x+1)-7][(2x+1)+4] \\
 = (2x-6)(2x+5) \\
 = [2(x-3)](2x+5) \\
 = 2(x-3)(2x+5) \circ
 \end{array}$$

4. (1) $x^2 - 6x - ax + 6a$
 $= (x^2 - 6x) - (ax - 6a)$
 $= x(x-6) - a(x-6)$
 $= (x-6)(x-a) \circ$

(2) $x^2 - y^2 - 2x + 1$
 $= (x^2 - 2x + 1) - y^2$
 $= (x-1)^2 - y^2$
 $= (x-1+y)(x-1-y)$
 $= (x+y-1)(x-y-1) \circ$

(3) $\triangleq A = x+y, B = x-y$,
 $6(x+y)^2 - 5(x^2 - y^2) - (x-y)^2 \circ$
 $= 6A^2 - 5AB - B^2$

$$\begin{array}{r}
 6A \quad \times \quad +B \\
 A \quad \quad \quad -B \\
 \hline
 -6AB + AB = -5AB \\
 = (6A+B)(A-B) \\
 = [6(x+y) + (x-y)][(x+y) - (x-y)] \\
 = (7x+5y)(2y) \\
 = 2y(7x+5y) \circ
 \end{array}$$

5. $(3x+2)(-x^6 + 3x^5) + (3x+2)(-2x^6 + x^5)$
 $+ (x+1)(3x^6 - 4x^5)$
 $= (3x+2)[(-x^6 + 3x^5) + (-2x^6 + x^5)]$
 $+ (x+1)(3x^6 - 4x^5)$
 $= (3x+2)[(-x^6 + 3x^5 - 2x^6 + x^5)]$
 $+ (x+1)(3x^6 - 4x^5)$
 $= (3x+2)(-3x^6 + 4x^5) + (x+1)(3x^6 - 4x^5)$
 $= (3x+2)[-(3x^6 - 4x^5)] + (x+1)(3x^6 - 4x^5)$
 $= -(3x+2)(3x^6 - 4x^5) + (x+1)(3x^6 - 4x^5)$
 $= (3x^6 - 4x^5)[-(3x+2) + (x+1)]$
 $= x^5(3x-4)(-3x-2+x+1)$
 $= x^5(3x-4)(-2x-1)$
 $= -x^5(3x-4)(2x+1) \circ$

● 進階練習題

1. (1) $8x^3 - 27$
 $= (2x)^3 - 3^3$
 $= (2x-3)[(2x)^2 + (2x) \cdot 3 + 3^2]$
 $= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9) \circ$

(2) $(x^2+2)(x^4-2x^2+4)$
 $-(x^2+2)(x^4+2x^2+4)$
 $= (x^2+2)[(x^4-2x^2+4) - (x^4+2x^2+4)]$
 $= (x^2+2)[x^4-2x^2+4-x^4-2x^2-4]$
 $= (x^2+2)(-4x^2)$
 $= -4x^2(x^2+2) \circ$

2. (1) $x^4 - 10x^2 + 9$

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad \times \quad -9 \\
 x^2 \quad \quad \quad -1 \\
 \hline
 -x^2 - 9x^2 = -10x^2 \\
 = (x^2-9)(x^2-1) \\
 = (x+3)(x-3)(x+1)(x-1) \circ
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2) & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 63 \\ & = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 63 \\ & = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } A &= x^2+5x, \\ & = (A+4)(A+6) - 63 \quad \begin{array}{r} A \times +13 \\ A \times -3 \\ \hline -3A+13A=10A \end{array} \\ & = A^2+10A+24-63 \\ & = A^2+10A-39 \\ & = (A+13)(A-3) \\ & = (x^2+5x+13)(x^2+5x-3) \end{aligned}$$

$$3. (1) x^4+7x^2+16$$

$$\begin{aligned} & = (x^4+8x^2+16) - x^2 \\ & = (x^2+4)^2 - x^2 \\ & = [(x^2+4)+x][(x^2+4)-x] \\ & = (x^2+x+4)(x^2-x+4) \end{aligned}$$

$$(2) x^4+64$$

$$\begin{aligned} & = (x^4+16x^2+64) - 16x^2 \\ & = (x^2+8)^2 - (4x)^2 \\ & = [(x^2+8)+4x][(x^2+8)-4x] \\ & = (x^2+4x+8)(x^2-4x+8) \end{aligned}$$

4. 〈方法1〉

$$\begin{array}{r} 4x+3 \\ 2x+3 \overline{) 8x^2+ax+9} \\ \underline{8x^2+12x} \\ (a-12)x+9 \\ \underline{6x+9} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow a-12=6 \circ$$

$$\therefore a=18$$

〈方法2〉

$$\text{令 } f(x) = 8x^2+ax+9$$

根據因式定理， $f(-\frac{3}{2})=0$ ，

$$f(-\frac{3}{2})^2+a(-\frac{3}{2})+9=0$$

$$\Rightarrow a=18 \circ$$

$$5. \text{ 令 } f(x) = x^4-3ax^2+bx+4,$$

根據因式定理可知：

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-3a-b+4=0 \\ 16-12a+2b+4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=5 \\ 6a-b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{3} \\ b=0 \end{cases}$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{3}$$

單元3 指數律與科學記號

簡答區

基礎練習題

$$1. (1) -134; (2) -47$$

$$2. (1) -243; (2) 64; (3) \frac{1}{16}$$

$$3. (1) 1.23 \times 10^{-5}; (2) 1.23 \times 10^7; (3) 1.23 \times 10^{-12}$$

$$4. (1) 7.15 \times 10^{-7}; (2) 6.25 \times 10^{-7}$$

$$5. (1) 5.2 \times 10^{13}; (2) 1.3 \times 10^5 \quad 6. 4.08 \times 10^{15}$$

進階練習題

$$1. (1) \sqrt{3}; (2) \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; (3) \sqrt[3]{9}; (4) 3\sqrt{3}$$

$$2. (1) \frac{27}{8}; (2) \frac{1}{125} \quad 3. (1) 9; (2) \frac{1}{81}$$

$$4. (1) 98; (2) 970; (3) 9602$$

$$5. (1) \frac{4}{5}; (2) 27; (3) \frac{1}{2}$$

詳答區

基礎練習題

$$1. (1) -3^4-7^2-\frac{2^6}{(-2)^4} = -81-49-\frac{64}{16}$$

$$= -134 \circ$$

$$(2) -4^3+(-5)^0+(-2)^4 = -64+1+16$$

$$= -47 \circ$$

$$2. (1) (-3)^3 \times (-3)^2 = (-3)^5 = -243 \circ$$

$$(2) (2^2)^3 = 2^6 = 64 \circ$$

$$(3) \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)^4$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \circ$$

$$3. (1) 0.0000123 = 1.23 \times 10^{-5} \circ$$

$$(2) 12300000 = 1.23 \times 10^7 \circ$$

$$(3) 12300 \times 10^{-16} = 1.23 \times 10^4 \times 10^{-16}$$

$$= 1.23 \times 10^{-12} \circ$$

$$4. (1) a+b = 6.7 \times 10^{-7} + 4.5 \times 10^{-8}$$

$$= 6.7 \times 10^{-7} + 0.45 \times 10^{-7}$$

$$= (6.7+0.45) \times 10^{-7}$$

$$= 7.15 \times 10^{-7} \circ$$

$$(2) a-b = 6.7 \times 10^{-7} - 4.5 \times 10^{-8}$$

$$= 6.7 \times 10^{-7} - 0.45 \times 10^{-7}$$

$$= (6.7-0.45) \times 10^{-7}$$

$$= 6.25 \times 10^{-7} \circ$$

$$\begin{aligned} 5. (1) a \times b &= (2.6 \times 10^9) \times (2 \times 10^4) \\ &= 2.6 \times 2 \times 10^9 \times 10^4 \\ &= 5.2 \times 10^{13}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) a \div b &= (2.6 \times 10^9) \div (2 \times 10^4) \\ &= \frac{2.6 \times 10^9}{2 \times 10^4} = 1.3 \times 10^5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. 1.36 \times 10^{18} \times 0.3\% &= 1.36 \times 10^{18} \times 0.003 \\ &= 1.36 \times 10^{18} \times 3 \times 10^{-3} \\ &= 4.08 \times 10^{15}. \end{aligned}$$

進階練習題

$$1. (1) 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$(2) 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

$$(3) 3^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}.$$

$$(4) 3^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}.$$

$$2. (1) \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$$

$$(2) \frac{5^{-0.3} \times 5^{-2.9}}{5^{-0.2}} = \frac{5^{-3.2}}{5^{-0.2}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}.$$

$$3. (1) a^{\frac{3}{2}} = 27, \text{ 兩邊同時取 } \frac{2}{3} \text{ 次方,}$$

$$\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}},$$

$$a = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$$

$$(2) 8^b = 729 \Rightarrow (2^3)^b = 729$$

$$\Rightarrow 2^{3b} = 3^6, \text{ 兩邊同時 } -\frac{2}{3} \text{ 次方,}$$

$$\Rightarrow (2^{3b})^{-\frac{2}{3}} = (3^6)^{-\frac{2}{3}}, 2^{-2b} = 3^{-4},$$

$$(2^2)^{-b} = \frac{1}{81}, 4^{-b} = \frac{1}{81}.$$

$$4. (1) a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 10, \text{ 兩邊平方,}$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 100,$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 100,$$

$$a + 2 + a^{-1} = 100. \therefore a + a^{-1} = 98$$

$$(2) a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3$$

$$= \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right) \left[\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

$$= 10 \times (a^1 - 1 + a^{-1})$$

$$= 10 \times (98 - 1) = 970.$$

$$\begin{aligned} (3) a^2 + a^{-2} &= (a^1 + a^{-1})^2 - 2 \times a^1 \times a^{-1} \\ &= 98^2 - 2 = 9604 - 2 \\ &= 9602. \end{aligned}$$

$$5. (1) \text{原式} = (0.9^3)^{-\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{9}{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= 0.9^{-2} \left(\frac{9}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \left(\frac{10}{3^2}\right)^2 \left(\frac{3^2}{5}\right) \left(\frac{3^2}{5^2}\right)$$

$$= \frac{10^2 \times 3^4}{3^4 \times 5^3} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$(2) \text{原式} = [(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})]^{\frac{3}{2}}$$

$$= (4^2 - \sqrt{7}^2)^{\frac{3}{2}} = (16 - 7)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} = 27.$$

$$(3) \text{原式} = [(2^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} (2^2)^{\frac{1}{8}} (2^6)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-2} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

單元 4 多項式的四則運算

簡答區

基礎練習題

- (1) $4x-6$; (2) $-3x^4-14x^3-9x^2+10x$
- x^2-2x+1 3. $6x^2-x-12$
- $A=2x^2-4x-3$, $B=-x^2+7x+8$
- 35, 60, 1

進階練習題

- (1) $3x^5+7x^2-3x-8$; (2) $6x^5-x^3+7x^2-4x-2$;
(3) 商式 $=3x^3+6x+4$, 餘式 $=9x+6$
- $4x-4$, $5x$ 3. (1) $x-3$; (2) -13
- (1) $aq(x)$, $r(x)$; (2) $cq(x)$, $cr(x)$;
(3) $q\left(\frac{x}{a}\right)$, $r\left(\frac{x}{a}\right)$
- (1) m ; (2) m ; (3) $m+n$

詳答區

基礎練習題

- (1) $3A+B=3(x^2+3x-2)+(-3x^2-5x)$
 $=3x^2+9x-6-3x^2-5x$
 $=(3x^2-3x^2)+(9x-5x)-6$
 $=4x-6$ 。
(2) $A \times B=(x^2+3x-2)(-3x^2-5x)$
 $=-3x^4-5x^3-9x^3-15x^2+6x^2+10x$
 $=-3x^4-(5x^3+9x^3)-(15x^2-6x^2)$
 $+10x$
 $=-3x^4-14x^3-9x^2+10x$ 。
2. 原式 $=2x^2-2x+x-1-x^2-x+2$
 $=(2x^2-x^2)+(-2x+x-x)+(-1+2)$
 $=x^2-2x+1$ 。
3. 原式 $=6x^2+8x-9x-12$
 $=6x^2-x-12$ 。
4. $\begin{cases} A+B=x^2+3x+5 \dots\dots\dots ① \\ A-B=3x^2-11x-11 \dots\dots\dots ② \end{cases}$
①+②: $2A=4x^2-8x-6$
 $\Rightarrow A=2x^2-4x-3$ 。
①-②: $2B=-2x^2+14x+16$
 $\Rightarrow B=-x^2+7x+8$ 。

- x^4 項: $1 \cdot 5x^4+2x \cdot 4x^3+3x^2 \cdot 3x^2+4x^3 \cdot 2x+5x^4 \cdot 1$
 $=5x^4+8x^4+9x^4+8x^4+5x^4$
 $=35x^4$ 。
 x^9 項: $5x^4 \cdot 6x^5+6x^5 \cdot 5x^4$
 $=30x^9+30x^9=60x^9$ 。
常數項 $=1 \times 1=1$ 。

進階練習題

- (1) $f(x)+3g(x)$
 $=(3x^5+4x^2-3x-2)+3(x^2-2)$
 $=3x^5+4x^2-3x-2+3x^2-6$
 $=3x^5+7x^2-3x-8$ 。
(2) $2f(x)-(x+1)g(x)$
 $=2(3x^5+4x^2-3x-2)-(x+1)(x^2-2)$
 $=(6x^5+8x^2-6x-4)-(x^3-2x+x^2-2)$
 $=6x^5+8x^2-6x-4-x^3+2x-x^2+2$
 $=6x^5-x^3+7x^2-4x-2$ 。
(3)
$$\begin{array}{r} 3x^3+0x^2+6x+4 \\ x^2+0x-2 \overline{) 3x^5+0x^4+0x^3+4x^2-3x-2} \\ \underline{3x^5+0x^4-6x^3} \\ 0x^4+6x^3+4x^2 \\ \underline{0x^4+0x^3+0x^2} \\ 6x^3+4x^2-3x \\ \underline{6x^3+0x^2-12x} \\ 4x^2+9x-2 \\ \underline{4x^2+0x-8} \\ 9x+6 \end{array}$$

商式 $=3x^3+6x+4$, 餘式 $=9x+6$ 。
2.
$$\begin{array}{r} 4x-4 \leftarrow q(x) \\ x^2+x-1 \overline{) 4x^3+0x^2-3x+4} \\ \underline{4x^3+4x^2-4x} \\ -4x^2+x+4 \\ \underline{-4x^2-4x+4} \\ +5x+0 \leftarrow r(x) \end{array}$$

3. $f(x)=(x-5)(2x+3)+5$
 $=2x^2+3x-10x-15+5$
 $=2x^2-7x-10$ 。
$$\begin{array}{r} x-3 \\ 2x-1 \overline{) 2x^2-7x-10} \\ \underline{2x^2-x} \\ -6x-10 \\ \underline{-6x+3} \\ -13 \end{array}$$

4. 已知 $f(x) = (ax+b)q(x) + r(x)$ 。

$$(1) f(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)q(x) + r(x)$$

$$= \left(x + \frac{b}{a}\right)[aq(x)] + r(x)。$$

$$(2) f(x) = (ax+b)q(x) + r(x)$$

$$\Rightarrow cf(x) = c(ax+b)q(x) + cr(x)$$

$$\Rightarrow cf(x) = (ax+b)[cq(x)] + cr(x)。$$

$$(3) f(x) = (ax+b)q(x) + r(x)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{a}\right) = \left(x + b\right)\left[q\left(\frac{x}{a}\right)\right] + r\left(\frac{x}{a}\right)。$$

5. 令 $f(x) = x^m$, $g(x) = x^n$, $m > n$,

$$(1) f(x) + g(x) = x^m + x^n$$

$$\Rightarrow \deg[f(x) + g(x)] = m。$$

$$(2) f(x) - g(x) = x^m - x^n$$

$$\Rightarrow \deg[f(x) - g(x)] = m。$$

$$(3) f(x) \cdot g(x) = x^{m+n}$$

$$\Rightarrow \deg[f(x) \cdot g(x)] = m + n。$$

單元 5 不等式

簡答區

基礎練習題

- $-2 \leq p \leq \frac{5}{2}$
- (1) $-16 < 2a - 3b < 9$;
(2) $0 \leq a^2 + b^2 < 25$;
(3) $-8 < ab < 12$
- (1) $x \leq 1$; (2) $x < 20$
- $-6 < x$ 5. $x > \frac{5}{3}$
- 學生共有 5 人，橘子有 23 顆；
學生共有 6 人，橘子有 26 顆。

進階練習題

- (1) $-1 < x < 2$; (2) $x > 2$ 或 $x < -1$
- $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$
- $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- $x < -3$ 或 $x > -3$
- 全體實數

詳答區

基礎練習題

- $-1 \leq x \leq 2$
 $\Rightarrow -3 \leq 3x \leq 6$
 $\Rightarrow -4 \leq 3x - 1 \leq 5$
 $\Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}(3x - 1) \leq \frac{5}{2}$
 $\Rightarrow -2 \leq p \leq \frac{5}{2}。$
- (1) $-2 < a < 3 \Rightarrow -4 < 2a < 6$ ①
 $-1 < b < 4 \Rightarrow 3 > -3b > -12$
 $\Rightarrow -12 < -3b < 3$ ②
 ①+②得 $-16 < 2a - 3b < 9$ 。
 (2) $-2 < a < 3 \Rightarrow 0 \leq a^2 < 9$ ③
 $-1 < b < 4 \Rightarrow 0 \leq b^2 < 16$ ④
 ③+④得 $0 \leq a^2 + b^2 < 25$ 。

(3)

$a \backslash b$	-1	4
-2	2	-8
3	-3	12

ab 之值如上表，故 $-8 < ab < 12$ 。

3. (1) $4x+1 \leq 4+x$

$\Rightarrow 4x-x \leq 4-1$

$\Rightarrow 3x \leq 3$

$\Rightarrow x \leq 1$ 。

(2) $5(2x+3)-2x < 7(x+5)$

$\Rightarrow 10x+15-2x < 7x+35$

$\Rightarrow 8x+15 < 7x+35$

$\Rightarrow 8x-7x < 35-15$

$\Rightarrow x < 20$ 。

4. $\frac{4x-1}{3} < \frac{3x+2}{2} - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 2(4x-1) < 3(3x+2)-2$

$\Rightarrow 8x-2 < 9x+6-2$

$\Rightarrow 8x-2 < 9x+4$

$\Rightarrow -2-4 < 9x-8x$

$\Rightarrow -6 < x$ 。

5. $3ax < 5a$ ，同除以 $3a$ ，但 $a < 0$ ，故 $x > \frac{5}{3}$ 。

6. 設學生有 x 人，則橘子共有 $(3x+8)$ 顆。

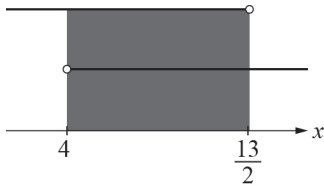
$5(x-1) < 3x+8 < 5x$ ，

$\Rightarrow 5x-5 < 3x+8 < 5x$ ，

① $5x-5 < 3x+8 \Rightarrow 2x+13 \Rightarrow x < \frac{13}{2}$ 。

② $3x+8 < 5x \Rightarrow 8 < 2x \Rightarrow x > 4$ 。

根據①且②，



$\Rightarrow 4 < x < \frac{13}{2}$

$\Rightarrow x$ 可能為 5 或 6。

若 $x=5$ ，則學生共有 5 人，橘子有 23 顆。

若 $x=6$ ，則學生共有 6 人，橘子有 26 顆。

進階練習題

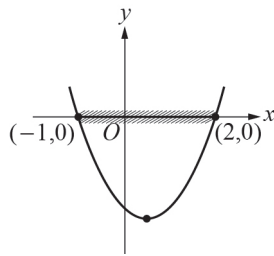
1. (1) $y=f(x)=x^2-x-2$

$= (x-2)(x+1)$ 。

已知 $y=x^2-x-2$ 為二次函數，

且 x^2 項係數為正，

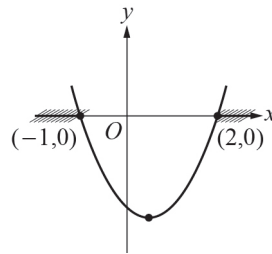
所以開口向上，如下圖。



故 $-1 < x < 2$ 。

(2) $-x^2-x+2 < 0 \Rightarrow x^2+x-2 > 0$ ，

由(1)可知，如下圖。



故 $x > 2$ 或 $x < -1$ 。

2. $y=f(x)=2x^2+2x-3$ ，

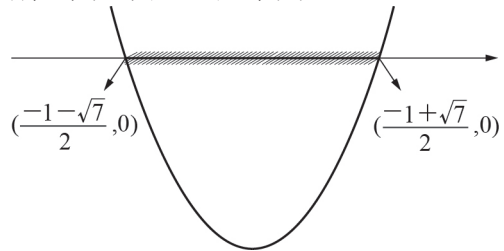
判別式 $D=4-4 \times 2 \times (-3)$

$=4+24=28$ 。

利用公式解可得 $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ 或 $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ ，

因為 x^2 項係數為正，

所以開口向上，如下圖，



故 $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ 。

3. $y=f(x)=2x^2-2x-1$ ，

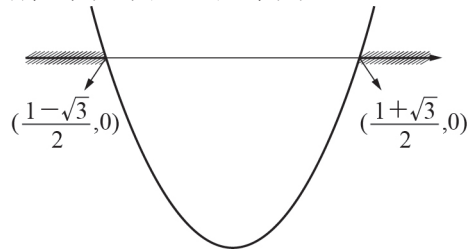
判別式 $D=(-2)^2-4 \times 2 \times (-1)$

$=4+8=12$ 。

利用公式解可得 $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ，

因為 x^2 項係數為正，

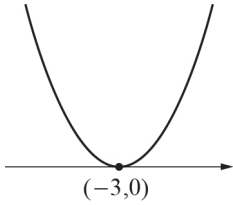
所以開口向上，如下圖，



故 $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 。

4. $y=f(x)=x^2+6x+9=(x+3)^2$ 。

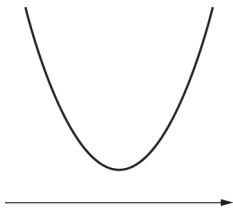
如下圖可知，



除了 $x=-3$ 以外， $f(x)>0$ ，
故 $x<-3$ 或 $x>-3$ 。

5. $y=f(x)=x^2-x+3$ ，

判別式 $D=(-1)^2-4\times 1\times 3=-11<0$ 。
由判別式 $D<0$ 可知，
該圖形與 x 軸沒有交點，如下圖，



故解為「全體實數」。

單元 6 二元函數

簡答區

基礎練習題

1. $(-3, 4)$ ， $x=-3$ ， -3 ，小，4

2. 8

3. $y=(x-1)^2+2$

4. (1) $<$ ；(2) $<$ ；(3) $>$ ；(4) $>$

5. $d>0$ 6. $D(9, 0)$ 7. 1

8. (1) x^2 ；

(2) 當 x 值為 4 時，五邊形 $PQABR$ 面積有最大值為 120 平方公分

9. $(0, \frac{27}{2})$

10. (1) 最大值 $=f(2)=13$ ，最小值 $=f(5)=4$ ；

(2) 最大值 $=f(3)=12$ ，最小值 $=f(6)=-3$

詳答區

基礎練習題

1. $y=2x^2+12x+22$

$$=2(x^2+6x+9)+22-18$$

$$=2(x+3)^2+4。$$

頂點為 $(-3, 4)$ ，對稱軸為 $x=-3$ 。

因 x^2 項係數為正，

故當 $x=-3$ 時， y 有最小值為 4。

2. 因為 $y=-x^2+bx+c$ 與 $y=ax^2-6x+2$

兩圖形相同，所以可知 $a=-1$ 。

$$y=-x^2-6x+2=-(x+3)^2+11，$$

由方程式可知原頂點 $(-3, 11)$ ，

↓ 向左 3，向上 5 平移

新頂點 $(-6, 16)$ ，

可知新方程式為 $y=-(x+6)^2+16$

$$=-(x^2+12x+36)+16$$

$$=-x^2-12x-20。$$

故 $b=-12$ ， $c=-20$

$$\Rightarrow b-c=-12-(-20)=8。$$

3. 設頂點為 $(1, k)$,

則二次函數為 $y = a(x-1)^2 + k$,

將 $(-1, 6), (2, 3)$ 代入,

$$\begin{cases} 6 = a(-1-1)^2 + k \\ 3 = a(2-1)^2 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 4a + k \\ 3 = a + k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

故二次函數為 $y = (x-1)^2 + 2$ 。

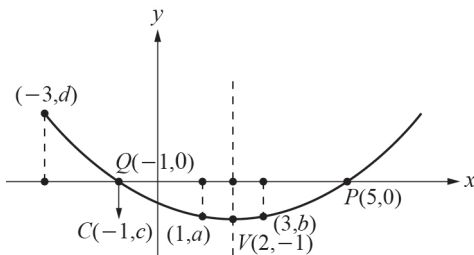
4. (1) 開口向下： $a < 0$ 。

(2) $\frac{-b}{2a} < 0$, 且 $a < 0 \Rightarrow b < 0$ 。

(3) 與 y 軸交點 $(0, c)$, 在 x 軸上方, 故 $c > 0$ 。

(4) 與 x 軸有兩個交點, 故 $b^2 - 4ac > 0$ 。

5. 由頂點 $(2, -1)$, $\overline{PQ} = 6$ 可大致畫出如下圖,



由圖形可知, $d > 0$ 。

6. $y = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$,

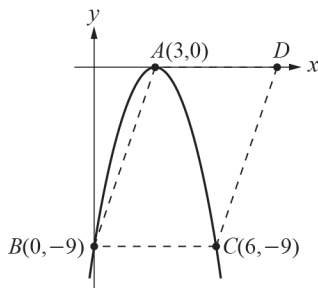
則頂點 $A(3, 0)$ 。

與 y 軸交於 B 點, 令 $x = 0 \Rightarrow y = -9$,

則 $B(0, -9)$ 。

且 D 點在 x 軸,

故可得平行四邊形圖形, 如下圖,



利用對稱性質可知, $C(6, -9) \Rightarrow D(9, 0)$ 。

$$7. \begin{cases} y = 3x^2 + a \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2 = 3x^2 + a,$$

$$x^2 = \frac{-2-a}{3}, x = \pm \sqrt{\frac{-2-a}{3}}.$$

則 A, B 兩點坐標分別為

$$\left(\sqrt{\frac{-2-a}{3}}, -2 \right), \left(-\sqrt{\frac{-2-a}{3}}, -2 \right).$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{\frac{-2-a}{3}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-2-a}{3} = 1 \Rightarrow a = -5.$$

$$\begin{cases} y = -2x^2 + b \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2x^2 + b = -2,$$

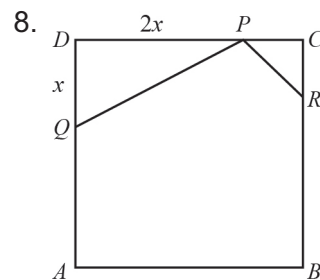
$$x = \pm \sqrt{\frac{2+b}{2}}.$$

則 C, D 兩點坐標分別為

$$\left(\sqrt{\frac{2+b}{2}}, -2 \right), \left(-\sqrt{\frac{2+b}{2}}, -2 \right).$$

$$\overline{CD} = 2\sqrt{\frac{2+b}{2}} = 4 \Rightarrow \frac{2+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 6.$$

故 $a + b = -5 + 6 = 1$ 。



8. (1) $\triangle PDQ$ 面積 $= \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2$ 。

(2) 由(1)知, $\overline{PC} = 12 - 2x$, 且已知 $\overline{PC} = \overline{CR}$,

$$\therefore \triangle PCR \text{ 面積} = \frac{1}{2} (12 - 2x)^2$$

五邊形 $PQABR$ 面積

$$= \text{正方形 } ABCD \text{ 面積} - \triangle PDQ \text{ 面積} - \triangle PCR \text{ 面積}$$

$$= 144 - x^2 - \frac{1}{2} (12 - 2x)^2$$

$$= 144 - x^2 - 72 + 24x - 2x^2$$

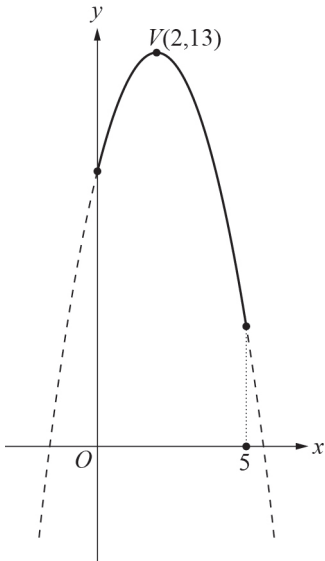
$$= -3x^2 + 24x + 72$$

$$= -3(x-4)^2 + 120.$$

故當 x 值為 4 時, 五邊形 $PQABR$ 面積有最大值 120 平方公分。

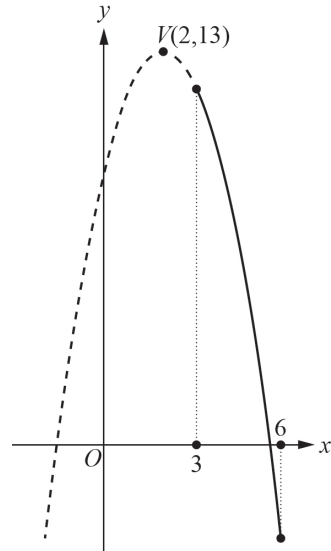
9. 設二次函數 $y = a(x+3)^2$ ，
 且已知 $\triangle ABC$ 為正三角形，令其邊長為 b ，
 則高 $= \frac{\sqrt{3}}{2}b = 2 \Rightarrow b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，
 故 $C(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 2)$ 。
 將 $C(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 2)$ 代入 $y = a(x+3)^2$ ，
 得 $2 = a(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3} + 3)^2$ ， $a = \frac{3}{2}$ 。
 因此二次函數為 $y = \frac{3}{2}(x+3)^2$ ，
 令 $x=0$ ，則 $y = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$ 。
 故與 y 軸交點坐標為 $(0, \frac{27}{2})$ 。

10. (1) $y = -x^2 + 4x + 9 = -(x-2)^2 + 13$ 。



圖形為實線部分。
 可知最大值 $= f(2) = 13$ ，
 最小值 $= f(5) = 4$ 。

(2) 圖形為實線部分。



可知最大值 $= f(3) = 12$ ，
 最小值 $= f(6) = -3$ 。



Note



Note



Note



Note



Note



Note